Изв. АН Армянской ССР, Физика, т. 22, вып. 4, 191—197 (1987)

УДК 523.64

# ВЫСОКОТОЧНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В ПЛОСКОМ СЛОЕ ДЛЯ МОДЕЛИ ПОЛНОГО ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПО ЧАСТОТАМ

Р. Г. ГАБРИЕЛЯН, А. Р. МКРТЧЯН, Х. В. КОТАНДЖЯН

Институт прикладных проблем физики АН АрмССР

М. А. МНАЦАКАНЯН

Бюраканская астрофизическая обсерватория АН АрмССР

(Поступила в редакцию 5 мая 1986 г.)

Найдены приближенные высокоточные аналитические решения наиболее общей по постановке задачи о переносе некогерентного излучения в трехмерной среде конечной оптической толщины для модели полного перераспределения по частотам.

Для однородных полубесконечных сред и простейших моделей элементарного акта рассеяния — монохроматического рассеяния и полного перераспределения по частотам (в изотропном случае) — решения задач о переносе излучения известны в замкнутом аналитическом виде [1—4]. Что касается среды конечной оптической толщины, то за исключением случая монохроматического рассеяния в одномерной среде найти для нее точные аналитические решения не удается. Поэтому представляется целесообразным получение для слоя конечной толщины приближенных аналитических решений, обладающих высокой точностью (см., например, [5]).

Настоящая работа посвящена выводу аналитических решений задачи о некогерентном рассеянии для модели полного перераспределения по частотам в трехмерной среде. Эта модель широко используется не только в астрофизических, но и во многих физических приложениях, например при исследовании процессов переноса мёссбауэровского излучения в твердых телах [6].

Отправными соотношениями для данного исследования служат уравнения метода сведения [7, 8], устанавливающие связь между решением произвольной задачи о слое конечной толщины с решением аналогичной задачи для полубесконечной среды. Они имеют следующий вид

$$
\begin{aligned}
J^+(z) &= j^+(z) + \int_0^\infty Z(\tau_0, z, z') j^-(z')\,dz', \\
J^-(z) &= j^-(z) + \int_0^\infty Z(\tau_0, z, z') j^+(z')\,dz'.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Здесь $j^\pm(z)$ — плотности вероятности выхода кванта через правую или левую границу слоя толщиной $\tau_0$ при произвольном распределении в нем летящих и поглощенных квантов, $J^\pm(z)$ — аналогичные величины для полубесконечной среды. Другой характеристикой полубесконечной среды является $Z(\tau, z, z')$ — вероятность того, что квант, летящий на глубине $\tau$ полубесконечной среды в направлении в глубь среды со значением переменной $z'$, выйдет из среды со значением $z$. Она определяется выражением

$$
Z(\tau, z, z') = \frac{\lambda}{2} z \frac{F(\tau, z) + \breve{F}(\tau, z')}{z + z'} G(z') \varphi(z), \tag{2}
$$

где функции $F$ и $\breve{F}$ представляются в виде

$$
\begin{aligned}
F(\tau, z) &= \frac{P(\tau, z)}{\frac{\lambda}{2}\varphi(z)}, \\
\breve{F}(\tau, z) &= z\varphi(z) \int_0^\infty \frac{P(\tau, z')}{z + z'} G(z')\,dz',
\end{aligned} \tag{3}
$$

$^{\mathcal{P}}(\tau, z)$ — плотность вероятности выхода кванта, поглощенного на бине $\tau$ полубесконечной среды [4], $G(z)$ — „характеристическая" нкция [4], $z = \eta/\alpha(x)$, $\alpha(x)$ — контур линии, $x$ — безразмерная час-та относительно центра линии, $\eta$ — косинус угла вылета, $\lambda$ — веро-юсть выживания кванта.

Сложением и вычитанием (1) можно свести к разделенным соот-пениям для суммы $s = j^{+} + j^{-}$ и разности $h = j^{+} - j^{-}$:

$$S(z) = s(z) + \int_0^\infty Z(\tau_0, z, z')\, s(z')dz',$$
$$H(z) = h(z) - \int_0^\infty Z(\tau_0, z, z')\, h(z')\, dz'. \tag{4}$$

Соотношения (4) представляют собой линейные интегральные уравне-я Фредгольма второго рода относительно неизвестных $s(z)$ и $h(z)$, вы-жающие их непосредственно через известные решения $S$, $H$ и величину которые характеризуют процессы переноса в полубесконечной среде.

После того, как будет найдено «внешнее» решение $j^{\pm}(z)$, нетрудно ределить и внутреннее поле $j(\tau, z)$ в данном слое с помощью соотноше-я

$$J(\tau, z) = j(\tau, z) + \int_0^\infty \Gamma(\tau, \tau_0, z, z')\, j^{-}(z')\, dz', \tag{5}$$

е $\Gamma$ — полная функция Грина полубесконечной среды.

Рассматриваемый подход в определенном смысле представляет собой ратную задачу — нахождение характеристик слоя конечной толщины по алогичным характеристикам полубесконечной среды. Такой подход дает зможность экспериментально исследовать свойства оптически толстого оя и по ним уже определить свойства тонких слоев. Соотношение (5) вы-жает решение другой обратной задачи — определение внутренних полей слое по выходящему из него излучению. С другой стороны, так как свойствам полубесконечной среды предложенным методом можно опре-лить свойства слоя любой толщины и, в частности, бесконечно тонкого оя, то это означает, что можно найти и характеристики элементарного та рассеяния.

Займемся выводом искомых высокоточных аналитических решений. одставляя в уравнения (4) выражение (2) для $Z$, перепишем их в виде

$$S(z) = s(z) + P(\tau_0, z)\, s_z + \frac{\lambda}{2}\varphi(z)\, \tilde{s}_z,$$
$$H(z) = h(z) - P(\tau_0, z)\, h_z + \frac{\lambda}{2}\varphi(z)\, \tilde{h}_z, \tag{6}$$

е введены обозначения

$$f_z = z\int_0^\infty \frac{f(z')\,G(z')}{z + z'}\, dz', \quad \tilde{f}_z = z\int_0^\infty \frac{f(z')\,F(\tau_0, z')\,G(z')}{z + z'}\, dz'. \tag{7}$$

Теперь в уравнениях возникли неизвестные «образы» искомых функций типа $\dot{f}_z$ и $\bar{f}_z$. Для их определения надо на исходные уравнения (4) подействовать операторами (7). В результате действия второго оператора появляются неизвестные образы новых типов. Попытки замкнуть образующуюся такими операциями систему уравнений относительно вновь и вновь возникающих образов не достигают цели — иначе удалось бы найти точные аналитические решения задачи о слое конечной толщины. Поэтому ниже мы прибегнем к приближению, позволяющему замкнуть систему уравнений и тем самым найти приближенные, но явные аналитические решения поставленной задачи.

Наше приближение касается величины $\bar{F}$ и основывается на следующих соображениях. Согласно определению $F(\tau, z)$ есть вероятность того, что квант с частотой $x$, поглощенный на границе полубесконечной среды, пролетает на глубине $\tau$ в направлении $\eta$ в глубь среды. Величине же $\bar{F}(\tau, z)$ соответствует обратное направление: это есть вероятность того, что квант (с той же частотой $x$), поглощенный на границе полубесконечной среды, пролетит на глубине $\tau$ в направлении $\eta$ к ее границе. Из физического смысла этих величин очевидно, что $\bar{F}$, в отличие от $F$, описывает процесс рассеяния квантов, испытывающих в среднем много актов рассеяния. Поэтому уже для небольших глубин величину $\tilde{F}$ можно приближенно, но достаточно точно, заменить ее асимптотическим поведением, соответствующим большим глубинам. Последнее можно представить в следующей форме с разделяющимися переменными:

$$\bar{F}(\tau_0, z) \simeq C(\tau_0)\, z. \tag{8}$$

При существенно бо́льших глубинах (при тех же значениях $z$) аналогичное поведение начинает выполняться и для величины $F$. Такое большое различие в точности асимптотических поведений $\bar{F}$ и $F$ подтверждается также численными расчетами.

Идея наших приближенных решений уравнений (4) состоит в том, что под интегралами в выражении (2) мы берем точную величину $F(\tau, z)$, а величину $\tilde{F}(\tau, z)$ заменяем ее асимптотическим поведением (8). Хотя это приближение сильно нарушается в области больших $z$, но будучи использованным только в подынтегральных выражениях и, что очень важно, только при наибольшем значении параметра $\tau$, отвечающем толщине $\tau_0$, оно не приводит к значительной погрешности в силу того, что эти выражения содержат другие функции, быстро стремящиеся к нулю с увеличением $z$.

Используя это приближение, перепишем выражение для образа (6) в виде

$$\bar{f}_z = \tilde{F}(\tau_0, z)\,(f_0 - f_z). \tag{9}$$

Окончательно для решений $s(z)$ и $h(z)$ находим

$$\begin{aligned} s(z) &= S(z) - \beta(\tau_0, z)\, S_z + \left(\beta(\tau_0, z)\, P_z(\tau_0) - \frac{\lambda}{2}\varphi(z)\, \tilde{F}(\tau_0, z)\right) s_0, \\ h(z) &= H(z) + \beta(\tau_0, z)\, H_z + \left(\beta(\tau_0, z)\, P_z(\tau_0) + \frac{\lambda}{2}\varphi(z)\, \bar{F}(\tau_0, z)\right) h_0, \end{aligned} \tag{10}$$

где $\varphi(z)$ — $\varphi$-функция Амбарцумяна [1, 4],

$$\beta(\tau_0, z) = P(\tau_0, z) - \frac{\lambda}{2}\varphi(z)\tilde{F}(\tau_0, z) = \frac{\lambda}{2}\varphi(z)\left(F(\tau_0, z) - \tilde{F}(\tau_0, z)\right). \quad (11)$$

Таким образом, мы выразили искомые функции $s(z)$ и $h(z)$ через $S(z)$ и $H(z)$ и постоянные нормировки $s_0$ и $h_0$. Подставляя теперь (11) в (10) и интегрируя с учетом сделанного приближения, находим

$$s_0 = \frac{S_0 - S_\beta}{1 + a_0 - P_\beta}, \quad h_0 = \frac{H_0 + H_\beta}{1 - a_0 - P_\beta}, \quad (12)$$

где

$$f_0 \equiv \int_0^\infty fGdz, \quad f_\beta = \int_0^\infty \beta fGdz, \quad a_0 = \frac{\lambda}{2}\int_0^\infty \varphi\tilde{F}Gdz.$$

Формулы (10)—(12) и решают окончательно поставленную задачу: они явным образом выражают решение задачи о слое конечной толщины $\tau_0$ через решения аналогичной задачи для полубесконечной среды.

Перейдем теперь к выводу приближенных и асимптотических форм из наших решений. Если использовать также приближение, состоящее в замене под интегралом величины $F(\tau_0, z)$ ее асимптотическим поведением $C(\tau_0)z$, то решения заметно упростятся. Тогда

$$s_0 = \frac{S_0}{1 + a_0}, \quad h_0 = \frac{H_0}{1 - a_0}. \quad (13)$$

По точности такие решения мало уступают предыдущим.

Более существенное упрощение, но связанное с большой потерей точности, связано с использованием приближения $F = C(\tau_0)z$ не только под интегралами. Тогда нужно $\beta \to 0$, и решения примут «асимптотическую» форму

$$\begin{aligned} s &= S - \frac{\lambda}{2}\varphi(z)\tilde{F}(\tau_0, z)s_0, \\ h &= H + \frac{\lambda}{2}\varphi(z)\tilde{F}(\tau_0, z)h_0. \end{aligned} \quad (14)$$

При этом, вообще говоря, нужно заменить характеристики полубесконечной среды $S$ и $H$, содержащие $\tau_0$, их асимптотическим поведением при больших $\tau_0 \gg z$, и мы получим аналог асимптотических решений, известных для $X$- и $Y$-функций Иванова [4]:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{2}\varphi(\tau_0, z) &= \frac{\lambda}{2}\varphi(z)\left(1 - \tilde{F}(\tau_0, z)\frac{\sqrt{1-\lambda}}{1-a_0^2}a_0\right), \\ \frac{\lambda}{2}\psi(\tau_0, z) &= \frac{\lambda}{2}\varphi(z)\tilde{F}(\tau_0, z)\frac{\sqrt{1-\lambda}}{1-a_0^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Для иллюстрации высокой точности найденных аналитических решений приведем результаты расчетов $\varphi$- и $\psi$- функций Амбарцумяна (при этом $S(z)=\frac{\lambda}{2}\varphi(1+F)$, $H(z)=\frac{\lambda}{2}\varphi(1-F)$) для случая лоренцовского профиля, когда $z=\eta(x^2+1)$:

$$\varphi(\tau_0, z)=\varphi(z)-\frac{2}{\lambda}\frac{\widetilde{F}(\tau_0, z)}{\varphi(z)}\beta(\tau_0, z)\left(1-\frac{\lambda}{2}\varphi_0\right)-\frac{\lambda}{2}\varphi(z)\widetilde{F}(\tau_0, z)\psi_0,$$

$$\psi(\tau_0, z)=\varphi(z)\widetilde{F}(\tau_0, z)\left(1-\frac{\lambda}{2}\varphi_0\right)+\frac{2}{\lambda}\frac{\beta(\tau_0, z)}{\varphi(z)}\left(1+\frac{\lambda}{2}\widetilde{F}(\tau_0, z)\psi_0\right), \tag{16}$$

$$\lambda\varphi_0=s_0+h_0,\quad \lambda\psi_0=s_0-h_0.$$

Для удобства сравнения с известными данными в таблице приведены результаты расчетов функций $X=\varphi/G$ и $Y=\psi/G$ с помощью аналитических выражений (16) (первая строка), численного решения уравнений (4) методом дискретизации (вторая строка) и асимптотических решений (15) (третья строка). Расчеты проведены для 20 значений $z=\operatorname{tg}\pi\sigma/2$, где $\sigma$ меняется равномерно от 0 до 1. Выбранное значение $\lambda=0{,}65$ отвечает конкретному мёссбауэровскому ядру $Zn^{67}$.

*Таблица*

$\lambda=0{,}65$

| $\tau_0$ | 0,1 | | 1.0 | | 5,0 | | 10,0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | $X$ | $Y$ | $X$ | $Y$ | $X$ | $Y$ | $X$ | $Y$ |
| 0,257 | 1,04585 | 0,71843 | 1,09515 | 0,05489 | 1,10043 | 0,00405 | 1,10070 | 0,00137 |
| | 1,04655 | 0,71463 | 1,09744 | 0,05767 | 1,10063 | 0,00444 | 1,10075 | 0,00148 |
| | 1,08297 | 0,02934 | 1,09577 | 0,01304 | 1,10034 | 0,00267 | 1,10067 | 0,00106 |
| 0,51 | 1,05424 | 0,87226 | 1,13746 | 0,21686 | 1,15143 | 0,00973 | 1,15196 | 0,00303 |
| | 1,05033 | 0,86246 | 1,13991 | 0,21873 | 1,15180 | 0,01031 | 1,15206 | 0,00321 |
| | 1,11514 | 0,06094 | 1,14173 | 0,02709 | 1,15121 | 0,00554 | 1,15190 | 0,00221 |
| 1,0 | 1,06448 | 0,96580 | 1,17892 | 0,49601 | 1,21430 | 0,03398 | 1,21547 | 0,00726 |
| | 1,05258 | 0,96042 | 1,17896 | 0,49306 | 1,21492 | 0,03454 | 1,21565 | 0,00750 |
| | 1,13919 | 0,12622 | 1,19426 | 0,05611 | 1,21390 | 0,01147 | 1,21533 | 0,00457 |
| 2,04 | 1,07874 | 1,02902 | 1,20657 | 0,72268 | 1,28712 | 0,17268 | 1,29128 | 0,03124 |
| | 1,05416 | 0,99489 | 1,20902 | 0,78347 | 1,28785 | 0,17165 | 1,29159 | 0,03130 |
| | 1,12588 | 0,27380 | 1,24534 | 0,12171 | 1,28795 | 0,02029 | 1,29104 | 0,00992 |
| 3.08 | 1,08876 | 1,05519 | 1,23244 | 0.92991 | 1,32664 | 0,33806 | 1,33521 | 0,09004 |
| | 1,05522 | 1,01086 | 1,22140 | 0,91011 | 1,32719 | 0,33480 | 1,33563 | 0,08945 |
| | 1,07763 | 0,42710 | 1,26398 | 0,18987 | 1,33045 | 0,02986 | 1,33527 | 0,01548 |
| 4,83 | 1,10082 | 1,07940 | 1,24847 | 1,04439 | 1,36434 | 0,56728 | 1,38025 | 0,23340 |
| | 1,05664 | 1,02314 | 1,23157 | 1,01629 | 1,36447 | 0,56076 | 1,38087 | 0,23124 |
| | 0,96327 | 0,69400 | 1,26605 | 0,30850 | 1,37405 | 0,04382 | 1,38188 | 0,02515 |
| 7,03 | 1,11146 | 1,09665 | 1,26029 | 1,11484 | 1,39036 | 0,75840 | 1,41334 | 0,41012 |
| | 1,05829 | 1,03050 | 1,23849 | 1,08000 | 1,39015 | 0,74920 | 1,41430 | 0,40521 |
| | 0,79239 | 1,03698 | 1,24480 | 0,46097 | 1,40619 | 0,05812 | 1,44390 | 0,03758 |

Как показывает сравнение данных, решение для $\varphi$ точнее, чем для $\psi$. Точность возрастает с ростом толщины слоя $\tau_0$, с уменьшением вероятности выживания $\lambda$ и при приближении к центру линии ($z\to 0$).

Из данных таблицы видно также, что приближенные решения для $X$ приведенные в работе [4], существенно отличаются от точных реше- Хотя $X$-функция с увеличением толщины среды приближается к точ- этого нельзя сказать об $Y$-функции. Она заметно отличается от точ- даже при больших $\tau_0$. А между тем именно эта функция представляет ольший интерес для эксперимента.

## ЛИТЕРАТУРА


мбарцумян В. А. Научные труды, т. 1, Ереван, 1960.
оболев В. В. Перенос лучистой энергии. Изд. тех. теор. лит., М., 1956.
оболев В. В. Рассеяние света в атмосферах планет. Изд. Наука, М., 1972.
ванов В. В. Перенос излучения и спектры небесных тел. Изд. Наука, М., 1969.
Інацаканян М. А. Астрофизика, 16, 513 (1980).
Ікртчян А. Р., Габриелян Р. Г. Астрофизика, 20, 607 (1984).
Інацаканян М. А. ДАН СССР, 225, 1049 (1975).
Енгибарян Н. Б., Мнацаканян М. А. Математические заметки, 19, 927 (1976).


## ՀԱՐԹ ՇԵՐՏՈՒՄ ՃԱՌԱԳԱՅԹՄԱՆ ՏԵՂԱՓՈԽՄԱՆ ԽՆԴՐԻ ԲԱՐՁՐ ՃՇՏՈՒԹՅԱՄԲ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԸ ԸՍՏ ՀԱՃԱԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԼՐԻՎ ՎԵՐԱԲԱՇԽՄԱՆ ՄՈԴԵԼԻ ՀԱՄԱՐ


Ռ. Գ. ԳԱԲՐԻԵԼՅԱՆ, Ա. Ռ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ, Խ. Վ. ՔՈԹԱՆՋՅԱՆ, Մ. Ա. ՄՆԱՑԱԿԱՆՅԱՆ



*Գտնված են վերջավոր օպտիկական հաստությամբ հարթ միջավայրում ամենաընդհանուր դրվածքով ոչ կոհերենտ ճառագայթման տեղափոխման խնդրի բարձր ճշտությամբ մոտավոր անալիտիկ լուծումներ ըստ հաճախությունների լրիվ վերաբաշխման մոդելի համար.*


## EARLY-EXACT ANALYTICAL SOLUTIONS OF THE PROBLEM OF RADIATION TRANSFER IN A PLANE LAYER FOR THE MODEL OF COMPLETE FREQUENCY REDISTRIBUTION


R. G. GABRIELYAN, A. R. MKRTCHYAN,
KH. V. KOTANDZYAN, M. A. MNATSAKANYAN



**Approximate nearly-exact analytical solutions of the most commonly formulated roblem of incoherent transfer of radiation in three-dimensional medium of finite hickness were obtained for the model of complete frequency redistribution.**